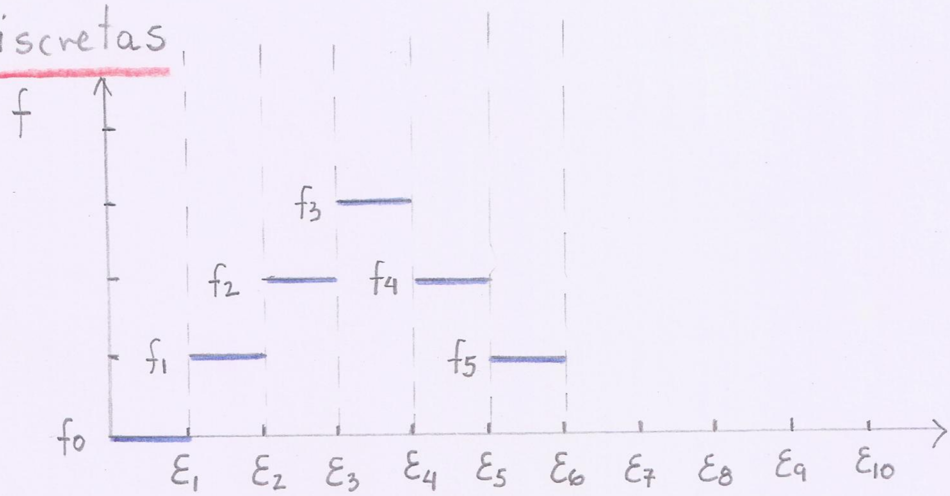
# Funciones de distribución



## Discretas




$$\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = \Delta\varepsilon_i$$

$$\Delta\varepsilon_i = \Delta\varepsilon$$

$n_i$ = número de partículas con energía entre $\varepsilon_i$ y $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i$

$f_i = \dfrac{n_i}{\Delta\varepsilon}$ = número de partículas por unidad de energía

$$n_i = f_i \Delta\varepsilon_i \qquad (1)$$

$$N = \sum_i n_i = \sum_i f_i \Delta\varepsilon_i = f_0 \Delta\varepsilon_0 + f_1 \Delta\varepsilon_1 + f_2 \Delta\varepsilon_2 + \ldots \qquad (2)$$

✓ Si $\Delta\varepsilon_i = \Delta\varepsilon$ es un intervalo de energía pequeño, podemos decir que la energía promedio de las partículas que tienen energías entre $\varepsilon_i$ y $\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i$ es razonablemente igual a $\dfrac{\varepsilon_i + (\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i)}{2} = \varepsilon_i + \dfrac{\Delta\varepsilon_i}{2}$.

✓ Con esta suposición, podemos escribir la energía total del sistema como

$$E = \sum_i n_i \left(\varepsilon_i + \frac{\Delta\varepsilon_i}{2}\right) = \sum_i f_i \Delta\varepsilon_i \left(\varepsilon_i + \frac{\Delta\varepsilon_i}{2}\right)$$

$$E = \sum_i f_i \Delta\varepsilon_i \varepsilon_i + f_i \frac{(\Delta\varepsilon_i)^2}{2} \qquad (3)$$

Siendo $\Delta\varepsilon_i$ muy pequeño, el segundo témino a la derecha en (3) puede ser despreciado

$$\Rightarrow \quad E = \sum_i f_i \Delta\varepsilon_i \, \varepsilon_i = \sum_i n_i \varepsilon_i \qquad (4)$$

La energía promedio será entonces

$$\bar{\varepsilon} = \frac{E}{N} = \sum_i \frac{n_i}{N} \varepsilon_i = \sum_i P_i \varepsilon_i \qquad (5)$$

con $\quad P_i = \dfrac{n_i}{N} \qquad (6)$

La cantidad $P_i$ representa la fracción de partículas del sistema que tienen energías entre $\varepsilon_i$ y $\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i$ (o una energía muy cercana a $\varepsilon_i$ porque $\Delta\varepsilon_i$ es muy pequeño pero no es infinitesimal)

Las ecuaciones (5) y (6) pueden interpretarse en dos formas

a) Si hay N partículas en un sistema, $n_i$ es el número de partículas que se encuentran en un estado con energía entre $\varepsilon_i$ y $\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i$

ó

b) Si hay una sola partícula en el sistema (u onda) que puede acceder a distintos estados de energía $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots$), entonces $P_i$ es la probabilidad de que la partícula se encuentre en un estado cuya energía esté entre $\varepsilon_i$ y $\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i$.

$\bar{\varepsilon}$ representa la energía promedio que tiene cada partícula en un sistema de N partículas

ó

la energía promedio de una partícula que tiene acceso a los niveles de energía con valores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots$

## Continuas

Usando las ecuaciones (4), (5) y (2):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{E}{N} = \frac{\sum_i f_i \, \Delta\varepsilon_i \, \varepsilon_i}{\sum f_i \, \Delta\varepsilon_i} \qquad (7)$$

Si la energía fuese continua (física clásica) entonces $\Delta\varepsilon_i = \Delta\varepsilon$ se convierte en una cantida infinitesimal $d\varepsilon$ y las sumatorias de (7) se transforman en integrales

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty f(\varepsilon)\, d\varepsilon \; \varepsilon}{\int_0^\infty f(\varepsilon)\, d\varepsilon} \qquad (8)$$

donde $f(\varepsilon)d\varepsilon$ representa el número de partículas del sistema que poseen energías con valores entre $\varepsilon$ y $\varepsilon + d\varepsilon$.

Es claro que $N = \int_0^{\infty} f(\varepsilon)\, d\varepsilon$ (9)

y que la probabilidad de que un. partícula tenga una energía entre $\varepsilon$ y $\varepsilon + d\varepsilon$ es

$$P(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{f(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\int_0^{\infty} f(\varepsilon)\, d\varepsilon} \qquad (10)$$

Usando (8), (9) y (10) :

$$\bar{\varepsilon} = \int P(\varepsilon)\, d\varepsilon\ \varepsilon \qquad (11)$$

## Distribución de Boltzmann

Para un sistema de partículas (u ondas) consideradas clásicas en un sistema en equilibrio térmico a temperatura T (Ver Apéndice C, Eisberg-Resnick, pag. 773)

se demuestra que

$$P(\varepsilon_i) = \frac{e^{-\varepsilon_i/kT}}{kT} \qquad (12)$$

En el caso de energías continuas

$$P(\varepsilon) = e^{-\varepsilon/kT}/kT \qquad (13)$$

y

$$\bar{\varepsilon} = \int P(\varepsilon)\, d\varepsilon\ \varepsilon \qquad (14)$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{1}{kT}\int \varepsilon\, e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon \qquad (15)$$

Definiendo $\alpha = -\frac{1}{kT}$ (16)

$$\varepsilon\, e^{-\varepsilon/kT} = \varepsilon\, e^{\alpha\varepsilon} = \frac{d}{d\alpha}(e^{\alpha\varepsilon}) \qquad (17)$$

Sustituyendo (16) y (17) en (15)

$$\bar{\varepsilon} = -\alpha \int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}(e^{\alpha\varepsilon})\, d\varepsilon = -\alpha \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty e^{\alpha\varepsilon} d\varepsilon = -\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{e^{\alpha\varepsilon}}{\alpha}\Big|_0^\infty\right)$$

$$\bar{\varepsilon} = -\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{1}{\alpha} = kT$$

✓ Bingo!!

✓ Esta es la energía promedio usada por Rayleigh-Jeans en su deducción clásica de $R_T(\nu)\,d\nu$ ó $R_T(\lambda)\,d\lambda$.